# מבוא להתפלגות נורמלית ועקומת הפעמון

- התפלגות נורמלית היא מודל נפוץ לתיאור משתנה כמותי שמתקבל כתוצאה מהרבה גורמים קטנים (לדוגמה: ציונים, גבהים, שגיאות מדידה).
- נסמן: $X \sim N(\mu, \sigma)$ כאשר: $\mu$ = **ממוצע** (מרכז ההתפלגות), $\sigma$ = **סטיית תקן**.
- גרף הצפיפות סימטרי סביב $\mu$: חצי מהשטח משמאל לממוצע וחצי מימין.
- **סה״כ שטח מתחת לעקומה = 1** (כל ההסתברויות יחד).

**רעיון מרכזי:** בהתפלגות נורמלית עובדים עם **שטחים** מתחת לעקומה — אלו ההסתברויות.

**דגש:** להדגיש לתלמידים: אין "גובה העקומה" = הסתברות; רק **שטח** נותן הסתברות.

## **דוגמה: פירוש $\mu$ ו-$\sigma$ באופן אינטואיטיבי**

נניח שציוני מבחן מתפלגים נורמלית: $X \sim N(75, 10)$.

- המשמעות: הציון "הטיפוסי" הוא סביב $75$.
- סטיית תקן $10$ אומרת שהפיזור "בסדר גודל" של $10$ נקודות סביב הממוצע.
- לפי כלל $99.7\% - 95\% - 68\%$ (בקירוב):
  - כ-$68\%$ מהציונים בין $\mu - \sigma = 65$ ל-$\mu + \sigma = 85$.
  - כ-$95\%$ בין $55$ ל-$95$ (כלומר $\mu \pm 2\sigma$).

**שגיאה נפוצה:** זהו כלל *קירוב*—בשאלות מדויקות משתמשים בציון תקן וטבלה.

# ציון תקן (Z) — מהו ואיך מוצאים אותו?

**רעיון מרכזי:** ציון תקן מודד "כמה סטיות תקן" הערך $x$ רחוק מהממוצע.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- אם $x > \mu$ אז $z > 0$ (מימין לממוצע).
- אם $x < \mu$ אז $z < 0$ (משמאל לממוצע).
- אחרי המרה ל-$Z$ עובדים עם $Z \sim N(0,1)$ (נורמלית סטנדרטית).

**דגש:** לתרגל עם התלמידים: "מיקום יחסי" — מעל/מתחת לממוצע, ומה גודל המרחק ב-$\sigma$.

## דוגמה: חישוב ציון תקן

נתון: $X \sim N(75, 10)$. תלמיד קיבל $x = 92$.

$$z = \frac{92 - 75}{10} = \frac{17}{10} = 1.7$$

- פירוש: 92 הוא **1.7 סטיות תקן** מעל הממוצע.
- כדי למצוא הסתברות (למשל: מה אחוז התלמידים עם ציון עד 92?) נשתמש בטבלה של $Z$.

**שגיאה נפוצה:** לא מערבבים בין $x$ (בסולם המקורי) לבין $z$ (בסולם התקן).

# שימוש בטבלת התפלגות נורמלית (טבלת Z)

ברוב הטבלאות בבגרות מופיע:

$$\Phi(z) = P(Z \le z)$$

כלומר **השטח משמאל** ל-$z$.

- הטבלה מסודרת לפי עמודה + שורה $= z$ .
- למשל $z = 1.03$: שורה $1.0$ ועמודה $0.03$.
- לשלילי: משתמשים בסימטריה $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ .

**דגש:** להכריח תלמידים לרשום בכל שאלה: "מה הטבלה נותנת?" $\Phi(z) =$ שמאל.

## דוגמה עם טבלה: חיפוש $\Phi(1.00)$ — סימון שורה/עמודה/תא

נניח שחישבנו $z = 1.00$. בטבלה נקרא:

$$\Phi(1.00) = P(Z \le 1.00) \approx 0.8413$$

**איך מוצאים בטבלה? שורה** $1.0$ + **עמודה** $0.00$ ⇒ התא המשותף.

| z | **0.00** | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.9 | 0.8159 | 0.8176 | 0.8192 | 0.8209 | 0.8224 | 0.8240 | 0.8256 | 0.8271 | 0.8287 | 0.8302 |
| **1.0** | **0.8413** | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |

**רעיון מרכזי:** הערך $0.8413$ הוא **השטח משמאל** ל-$z = 1.00$.

## מציאת השטח משמאל לנתון

המטרה: למצוא $P(X \le x)$ .

1. מחשבים $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$.
2. מוצאים בטבלה $P(Z \le z) = \Phi(z)$.
3. זה בדיוק $P(X \le x)$ .

**שגיאה נפוצה:** הטבלה לא "יודעת" $\mu, \sigma$ — רק אחרי המרה ל-$z$.

## דוגמה מלאה: $P(X \le 85)$ + טבלה מסומנת

נתון: $X \sim N(75, 10)$ . לחשב $P(X \le 85)$.

$$z = \frac{85 - 75}{10} = 1.00 \qquad \Rightarrow \qquad P(X \le 85) = \Phi(1.00)$$

| z | **0.00** | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.9 | 0.8159 | 0.8176 | 0.8192 | 0.8209 | 0.8224 | 0.8240 | 0.8256 | 0.8271 | 0.8287 | 0.8302 |
| **1.0** | **0.8413** | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |

$$P(X \le 85) = 0.8413$$

**תשובה:** כ-$84.13\%$ מהציונים הם עד $85$.

# מציאת השטח מימין לנתון

המטרה: $P(X \geq x)$.

**רעיון מרכזי:** אם הטבלה נותנת שמאל — מימין זה "המשלים ל-1".

$$P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Phi(z)$$

כאשר $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$.

**שגיאה נפוצה:** בשאלות "מעל ערך" — כמעט תמיד עושים $1 - \Phi(z)$.

## דוגמה מלאה: $P(X \geq 85)$ + טבלה מסומנת

נתון: $X \sim N(75, 10)$ . לחשב $P(X \geq 85)$.

$$z = \frac{85 - 75}{10} = 1.00$$

| 0.09 | 0.08 | 0.07 | 0.06 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | **0.00** | **z** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.8302 | 0.8287 | 0.8271 | 0.8256 | 0.8240 | 0.8224 | 0.8209 | 0.8192 | 0.8176 | 0.8159 | 0.9 |
| 0.8621 | 0.8599 | 0.8577 | 0.8554 | 0.8531 | 0.8508 | 0.8485 | 0.8461 | 0.8438 | **0.8413** | **1.0** |
| 0.8830 | 0.8810 | 0.8790 | 0.8770 | 0.8749 | 0.8729 | 0.8708 | 0.8686 | 0.8665 | 0.8643 | 1.1 |
| 0.9015 | 0.8997 | 0.8980 | 0.8962 | 0.8944 | 0.8925 | 0.8907 | 0.8888 | 0.8869 | 0.8849 | 1.2 |
| 0.9177 | 0.9162 | 0.9147 | 0.9131 | 0.9115 | 0.9099 | 0.9082 | 0.9066 | 0.9049 | 0.9032 | 1.3 |
| 0.9319 | 0.9306 | 0.9292 | 0.9279 | 0.9265 | 0.9251 | 0.9236 | 0.9222 | 0.9207 | 0.9192 | 1.4 |

$$P(X \geq 85) = 1 - \Phi(1.00) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

# מציאת השטח בין נתון אחד לנתון שני

המטרה: $P(a \le X \le b)$ .

1. ממירים לשני ציוני תקן: $z_a = \dfrac{a-\mu}{\sigma}$ , $z_b = \dfrac{b-\mu}{\sigma}$ .
2. מוצאים בטבלה $\Phi(z_a)$, $\Phi(z_b)$.
3. מחסרים:

$$P(a \le X \le b) = \Phi(z_b) - \Phi(z_a)$$

**שגיאה נפוצה:** לא לשכוח: קודם "שמאל עד $b$" ואז להוריד "שמאל עד $a$".

**דוגמה מלאה:** $P(70 \le X \le 90)$

נתון: $X \sim N(75, 10)$ .

$$z_{70} = \frac{70-75}{10} = -0.5, \qquad z_{90} = \frac{90-75}{10} = 1.5$$

נשתמש בטבלה של $\Phi(z)$:

$$\Phi(1.50) \approx 0.9332$$

ולשלילי:

$$\Phi(-0.50) = 1 - \Phi(0.50) \approx 1 - 0.6915 = 0.3085$$

לכן:

$$P(70 \le X \le 90) = 0.9332 - 0.3085 = 0.6247$$

**תשובה:** כ-$62.47\%$ .

**דגש:** בשקף זה מומלץ להוסיף שרטוט ידני על הלוח: שתי נקודות וחלק צבוע ביניהן.

# מציאת $z$ בהינתן שטח

המטרה: נתון שטח (הסתברות), ומבקשים למצוא את $z$.

- אם נתון $P(Z \leq z) = p$ — מחפשים בטבלה את $p$ ומוצאים את $z$ המתאים.
- אם נתון $P(Z \geq z) = p$ — קודם הופכים לשמאל:

$$P(Z \leq z) = 1 - p$$

**שגיאה נפוצה:** לפני שמחפשים בטבלה: לוודא האם $p$ הוא שמאל או ימין.

## דוגמה: למצוא $z$ כך ש-$P(Z \le z) = 0.8413$ + טבלה מסומנת

מחפשים בטבלה את $0.8413$: שורה $1.0$ ועמודה $0.00 \Rightarrow$

$$z \approx 1.00$$

| z | **0.00** | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.9 | 0.8159 | 0.8176 | 0.8192 | 0.8209 | 0.8224 | 0.8240 | 0.8256 | 0.8271 | 0.8287 | 0.8302 |
| **1.0** | **0.8413** | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |

**רעיון מרכזי:** מהטבלה קיבלנו $0.8413$, לכן $z = 1.00$ (שורה+עמודה).

## דוגמה: למצוא $z$ כך ש-$P(Z \geq z) = 0.10$ + טבלה מסומנת

נתון:

$$P(Z \geq z) = 0.10 \Rightarrow P(Z \leq z) = 1 - 0.10 = 0.90$$

מחפשים בטבלה ערך קרוב ל-$0.9000$. בקטע הטבלה שלנו הערך $0.8997$ נמצא ב: שורה $1.2$ ועמודה $0.08$, כלומר:

$$z \approx 1.28$$

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | **0.08** | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.9 | 0.8159 | 0.8176 | 0.8192 | 0.8209 | 0.8224 | 0.8240 | 0.8256 | 0.8271 | 0.8287 | 0.8302 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| **1.2** | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | **0.8997** | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |

**פירוש:** רק $10\%$ נמצאים מימין ל-$z \approx 1.28$.

# טרנספורמציה ליניארית בהתפלגות נורמלית

אם $X \sim N(\mu, \sigma)$ ויוצרים משתנה חדש:

$$Y = aX + b$$

אז גם $Y$ נורמלי, עם:

$$\mu_Y = a\mu + b, \qquad \sigma_Y = |a|\sigma$$

- **הוספת קבוע** $b$ מזיזה את כל ההתפלגות (שינוי ממוצע בלבד).
- **כפל ב-**$a$ משנה גם את הפיזור (סטיית תקן מוכפלת ב-$|a|$).

**שגיאה נפוצה:** שונות מוכפלת ב-$a^2$, אבל סטיית תקן ב-$|a|$.

## דוגמה מלאה: שינוי סולם ציונים

נתון: $X \sim N(75, 10)$ (ציונים "גולמיים").

מחליטים להוסיף 5 נק' בונוס ולכפול ב-$1.1$:

$$Y = 1.1X + 5$$

לכן:

$$\mu_Y = 1.1 \cdot 75 + 5 = 82.5 + 5 = 87.5$$

$$\sigma_Y = |1.1| \cdot 10 = 11$$

כלומר:

$$Y \sim N(87.5, 11)$$

**דגש:** להראות: "הוספה" מזיזה, "כפל" מותח/מכווץ את הפיזור.

# לסיכום:

- תמיד להמיר ל-$z$: $z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$.
- הטבלה נותנת $P(Z\le z)$ $\Phi(z)=$ **(שמאל)**.
- ימין: $1-\Phi(z)$. בין: $\Phi(z_b)-\Phi(z_a)$.
- בהינתן שטח: להפוך ל"שמאל" ואז לחפש בטבלה את ההסתברות — ולבנות $z$ משורה+עמודה.
- טרנספורמציה ליניארית: $\mu$ משתנה לפי $a\mu+b$, ו-$\sigma$ לפי $|a|\sigma$.

מומלץ לתרגול: לתת בכל נושא שאלה מילולית + סקיצה של עקומה עם שטח צבוע.